

Production d'entropie lors d'une compression monobare

par **François VANDENBROUCK**
Lycée Le Corbusier - 93300 Aubervilliers
f.vandenbrouck@wanadoo.fr
<http://perso.wanadoo.fr/f.vandenbrouck/>

RÉSUMÉ

La compression monobare et quasi-statique d'un gaz parfait est étudiée à l'aide d'un modèle cinétique simple qui tient compte de la vitesse de déplacement du piston. L'analyse théorique, comme les simulations numériques, révèle que la relaxation du système vers l'état d'équilibre final s'accompagne d'oscillations amorties du piston. En outre, on montre que la production d'entropie au cours de la transformation est directement liée à la vitesse de déplacement du piston.

1. INTRODUCTION

L'étude de la compression monobare d'un gaz parfait contenu dans un cylindre fermé par un piston constitue l'exercice type de thermodynamique, que l'on trouve dans nombre d'ouvrages classiques [1-2-3]. Pourtant, malgré la simplicité apparente de la transformation, l'origine de son irréversibilité n'est que trop rarement discutée avec précision.

Dans cet article, on utilise un modèle cinétique de la pression d'un gaz parfait au voisinage d'une paroi mobile [4]. L'étude couplée des transformations du gaz et du mouvement du piston permet d'identifier la production d'entropie dans le cas de transformations quasi statiques. Les résultats que nous obtenons précisent les explications proposées par Stéphane OLIVIER et Hubert GIÉ dans leur ouvrage [2]. Nous soulignons aussi l'intérêt pédagogique de l'utilisation de ce modèle puisqu'il constitue un moyen de « visualiser » la relaxation quasi statique d'un système thermodynamique simple vers son état d'équilibre final, et notamment d'illustrer les variations des potentiels thermodynamiques adaptés à la nature des transformations envisagées.

2. PRESSION D'UN GAZ PARFAIT AU CONTACT D'UNE PAROI MOBILE

On considère N molécules, de masse individuelle m , d'un gaz parfait contenues dans un cylindre horizontal. Le cylindre est fermé par un piston de masse M , pouvant se déplacer *sans frottement* le long de l'axe Ox conformément à la figure 1 ci-dessous. L'aire du piston est notée A .

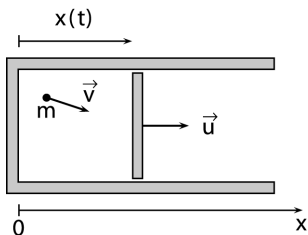


Figure 1 : Schéma du dispositif étudié.

Les parois latérales du cylindre sont immobiles dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire. La position du piston est repérée par son abscisse x ; le volume occupé par le gaz est alors $V = Ax$. La vitesse du piston mobile par rapport au référentiel \mathcal{R} est notée $\vec{u} = u\vec{e}_x$, où $u = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$. La vitesse individuelle d'une molécule par rapport au référentiel \mathcal{R} est notée \vec{v} .

On fait l'hypothèse que le piston se déplace suffisamment lentement pour que les vitesses des molécules se distribuent, à chaque instant, selon la loi de Boltzmann, ce qui permet de définir à chaque instant la température du gaz. Dans cette hypothèse, la transformation thermodynamique subie par le gaz sera qualifiée de *quasi statique* : l'état thermodynamique du gaz est à chaque instant infiniment proche d'un état d'équilibre, sans que le gaz ne soit nécessairement en équilibre thermodynamique avec son milieu extérieur. Par ailleurs, la masse M du piston est supposée largement supérieure à la masse d'une molécule : $M \gg m$.

Considérons le choc élastique d'une molécule, repérée par l'indice i , sur la face interne du piston supposée parfaitement lisse. La variation de la composante normale au piston de la quantité de mouvement, par rapport au référentiel \mathcal{R} , de cette molécule vaut, dans la limite $M \gg m$:

$$\Delta p_{ix} = m\Delta v_{ix} = 2m(u - v_{ix}). \tag{1}$$

La réflexion de la molécule sur la face interne du piston n'entraîne aucune variation de la composante tangentielle de la quantité de mouvement de la molécule.

Notons n_i le nombre de molécules par unité de volume dont les vitesses sont approximativement égales à v_i . Le nombre dn_i de molécules qui, pendant la durée élémentaire dt viennent heurter la face interne du piston, est $dn_i = n_i(v_{ix} - u)Adt$. On en déduit l'expression de la force moyenne, normale à la paroi du piston, qu'exercent les molécules sur la face interne du piston :

$$\langle F_x \rangle = 2mA \sum_{v_{ix} > 0} n_i (v_{ix} - u)^2, \tag{2}$$

où la sommation ne porte que sur les molécules se dirigeant effectivement vers la paroi ($v_{ix} > 0$). On en déduit l'expression de la pression, en tant que force moyenne rapportée à l'aire du piston :

$$P = 2m \left[\sum_{v_{ix} > 0} n_i v_{ix}^2 - 2u \sum_{v_{ix} > 0} n_i v_{ix} + u^2 \sum_{v_{ix} > 0} n_i \right]. \quad (3)$$

La loi de distribution des vitesses de MAXWELL donne : $\sum_{v_{ix} > 0} n_i v_{ix}^2 = \frac{1}{2} \frac{N}{V} \frac{k_B T}{m}$, et $\sum_{v_{ix} > 0} n_i v_{ix} = \frac{N}{V} \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$, où k_B désigne la constante de BOLTZMANN. On en déduit finalement l'expression de la pression que le gaz exerce sur la face interne du piston :

$$P = \frac{Nk_B T}{V} - \sqrt{\frac{8k_B T m}{\pi}} \frac{N}{V} u + \frac{N}{V} m u^2. \quad (4)$$

On constate que la pression *au voisinage de la paroi mobile* dépend de la vitesse du piston elle-même. Et dans le cas d'une paroi fixe, on retrouve l'expression de la pression cinétique correspondant à la loi des gaz parfaits. Le résultat établi ci-dessus suggère donc que le tenseur de pression du gaz est anisotrope.

Lors d'une transformation quasi statique, le gaz est infiniment proche d'un état d'équilibre thermodynamique et sa pression doit donc différer très peu de $\frac{Nk_B T}{V}$. Autrement dit,

pour une transformation quasi statique : $\sqrt{\frac{8mk_B T}{\pi}} \frac{N}{V} |u| \ll \frac{Nk_B T}{V}$, soit, à des coefficients numériques près, pour un gaz parfait donné à une température donnée :

$$|u| \ll \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (5)$$

La transformation sera quasi statique si la vitesse du piston reste largement inférieure à la vitesse quadratique moyenne des molécules gazeuses¹. Dans ces conditions, des simulations numériques montrent qu'à chaque instant, la pression au fond du cylindre et au voisinage de la paroi mobile sont quasiment égales, et que la distribution des vitesses des molécules reste maxwellienne [5]. Dans le cas où la vitesse du piston devient comparable, ou même supérieure, à la vitesse quadratique moyenne des molécules gazeuses, ces mêmes simulations montrent clairement la propagation d'ondes de choc dans le gaz, et un écart sensible de la distribution des vitesses par rapport à la distribution de MAXWELL. Précisons que plus le piston est massif, plus faible est sa vitesse et plus l'hypothèse de quasi-staticité est légitime.

3. OSCILLATIONS AUTOUR DE LA POSITION D'ÉQUILIBRE

On se propose d'utiliser le modèle de pression cinétique vu précédemment pour étudier le mouvement du piston au voisinage de sa position d'équilibre dans un cas très idéalisé par souci de simplicité, où l'on suppose que les parois du cylindre sont d'excel-

¹ La vitesse quadratique moyenne et la vitesse du son sont du même ordre de grandeur. La transformation peut donc être considérée comme quasi-statique si le piston se déplace à une vitesse largement inférieure à celle du son dans le gaz considéré.

lents conducteurs thermiques de sorte que la température du gaz reste constamment égale à la température T_0 du milieu extérieur, qui joue donc le rôle d'un thermostat. Le cas d'une transformation plus réaliste sera étudié numériquement dans la partie 2.

La pression qui s'exerce sur la face externe du piston est notée P_{ext} : elle inclut l'action de l'atmosphère et celle éventuelle d'un opérateur extérieur. Elle est, en tout cas, supposée constante et uniforme sur la section du piston.

Dans le référentiel \mathcal{R} , le théorème de la résultante cinétique permet de connaître le mouvement du piston :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = PA - P_{ext} A. \quad (6)$$

Toujours par souci de simplicité, on se contentera d'une expression de la pression affine vis-à-vis de la vitesse du piston : $P = \frac{Nk_B T}{V} - \sqrt{\frac{8mk_B T}{\pi}} \frac{N}{V} u$, puisque le terme quadratique est négligeable devant le terme linéaire dans l'hypothèse d'une transformation quasi statique (cf. équation (5)). L'équation du mouvement du piston s'écrit alors comme suit, avec $V = Ax$:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{Nk_B T_0}{x} - \sqrt{\frac{8mk_B T_0}{\pi}} \frac{N}{x} \frac{dx}{dt} - P_{ext} A. \quad (7)$$

On en déduit la position d'équilibre x_e du piston : $x_e = \frac{Nk_B T_0}{P_{ext} A}$. On retrouve, bien sûr, la loi des gaz parfaits.

Considérons que le système soit initialement dans son état d'équilibre (pression égale à P_{ext} selon (6) ; température T_0 et position x_e). À l'instant $t = 0^+$, un opérateur extérieur communique de l'énergie cinétique au piston. Pour étudier les petits mouvements du piston autour de la position d'équilibre, on définit $\xi = x - x_e$ avec $|\xi| \ll x_e$ et on linéarise l'équation du mouvement. Tous calculs faits, on obtient :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \sqrt{\frac{8m}{\pi k_B T_0}} \frac{P_{ext} A}{M} \frac{d\xi}{dt} + \frac{Nk_B T_0}{M x_e^2} \xi = 0. \quad (8)$$

Cette équation différentielle est celle d'un oscillateur amorti et peut être mise sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (9)$$

où

$$\omega_0 = \frac{P_{ext} A}{\sqrt{M N k_B T_0}}, \quad (10)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\pi M}{8 N m}}, \quad (11)$$

représentent respectivement la pulsation propre et le facteur de qualité de l'oscillateur. Le terme responsable de l'amortissement des oscillations du piston est le terme de pression

linéaire en vitesse, qui agit comme une force de frottement fluide. Une interprétation de l'origine de cet amortissement est proposée ci-après (cf. paragraphe 2).

Le temps caractéristique de l'amortissement des oscillations est :

$$\tau = \frac{Q}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\pi R T_0}{8m}} \frac{M}{P_{ext} A}, \quad (12)$$

où M est la masse molaire du gaz et R la constante des gaz parfaits.

À titre d'exemple, et pour fixer les idées, une masse M voisine de 2 g correspond à un amortissement critique, pour un récipient contenant 0,1 mol d'air. Le mouvement d'un piston plus massif sera oscillant. Plus la masse M est importante, et plus l'amortissement des oscillations est faible. Toutefois, la limite $M \rightarrow \infty$ correspond à un piston nécessairement immobile, qui n'oscille plus. La limite opposée, non réaliste et qui sort du cadre de nos hypothèses (transformation qui n'est plus quasi statique), où $M \sim m$ doit être traitée par une approche stochastique [6-7-8].

Le temps caractéristique de l'amortissement des inhomogénéités de pression en raison de la viscosité du gaz est [9] :

$$\tau_{visc} = \frac{2\gamma P_{ext}}{\eta \omega^2} \sim \frac{2\gamma M n R T_0}{\eta A^2 P_{ext}},$$

où $\gamma = C_p/C_v$ et η est la viscosité dynamique du gaz. On en déduit :

$$\tau \tau_{visc} = \frac{\eta A}{2n\gamma \sqrt{M R T_0}}.$$

Pour 0,1 mol d'air ($\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}^{-1}$) à 300 K, avec $A = 10^{-2} \text{ m}^2$, on obtient :

$$\tau \tau_{visc} \sim 10^{-7} !$$

Ceci montre que l'amortissement lié à la viscosité du gaz est un phénomène tout à fait marginal.

Notons enfin que la forme même de l'équation différentielle obtenue, non invariante par renversement du temps, montre que le mouvement du piston est irréversible. Comme nous le montrerons ci-après, la prise en compte de la masse finie et donc de la vitesse de déplacement finie du piston est à l'origine de création d'entropie dans le système.

4. ÉTUDE DYNAMIQUE D'UNE ÉVOLUTION MONOBARE

L'étude des oscillations isothermes que nous venons de présenter met en évidence deux paramètres caractéristiques de la dynamique du piston : une pulsation propre ainsi qu'un facteur de qualité (cf. équations (10) et (11)). On se propose maintenant d'étudier, dans le cadre du modèle cinétique présenté dans le paragraphe 2, le mouvement du piston dans le cas plus général d'une évolution (compression ou détente) quasi statique et monobare d'un gaz parfait afin d'identifier l'origine de l'irréversibilité de la transformation.

4.1. Équations fondamentales

Les équations qui régissent le mouvement du piston sont : le théorème de la résultante cinétique et la conservation de l'énergie totale (premier principe de la thermodynamique).

On suppose que le système {gaz + piston} est susceptible d'échanger de l'énergie sous forme thermique avec le milieu extérieur. La puissance thermique reçue à l'instant t par le système est notée : $P_{in} = a[T_0 - T(t)]$ où T_0 est la température du milieu extérieur et $T(t)$ la température du gaz à l'instant t . Le cas d'une transformation adiabatique correspond à $a=0$, le cas d'une transformation isotherme correspond à $a \rightarrow \infty$. Toutes les valeurs intermédiaires de a correspondent à une transformation seulement monotherme.

Le théorème de la résultante cinétique et le bilan de puissance instantanée s'écrivent comme suit :

$$M\ddot{x} = \frac{Nk_B T}{x} - N\sqrt{\frac{8mk_B T}{\pi}} \frac{\dot{x}}{x} + Nm \frac{\dot{x}^2}{x} - P_{ext} A, \quad (13)$$

$$M\dot{x}\ddot{x} + \frac{Nk_B}{\gamma-1} \dot{T} = -P_{ext} A \dot{x} + a[T_0 - T]. \quad (14)$$

où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$ et $\gamma = C_p/C_v$.

Afin d'obtenir numériquement les solutions de ces équations, il faut les mettre sous forme adimensionnée.

On pose $\beta = P_{ext}/P_0$ où P_0 est la pression initiale du gaz. La position adimensionnée X du piston est définie comme $X = x/x_0$ où x_0 est la position initiale du piston. L'échelle temporelle naturellement associée au système est construite à partir de ω_0 (cf. équation (10)). Le temps adimensionné est $\tilde{t} = \omega_0 t$, ce qui s'écrit sous la forme : $\tilde{t} = \beta \sqrt{\frac{AP_0}{MX_0}} t$. Les

dérivées des différentes grandeurs adimensionnées par rapport à \tilde{t} seront aussi notées avec des points surmontant les symboles de ces différentes grandeurs. La température adimensionnée du gaz est $\theta = T/T_0$ où T_0 est la température initiale du gaz. Les deux équations dynamiques apparaissent alors sous la forme suivante :

$$\ddot{X} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\theta}{X} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta Q} \sqrt{\theta} \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\pi}{8Q^2} \frac{\dot{X}^2}{X}, \quad (15)$$

$$\beta^2 \dot{X} \ddot{X} + \frac{1}{\gamma-1} \dot{\theta} = -\beta \dot{X} + \alpha(1-\theta), \quad (16)$$

où le paramètre $\alpha = a/(Nk_B \omega_0)$ est caractéristique du caractère plus ou moins bon conducteur thermique des parois du cylindre et du piston. Notons que sous forme adimensionnée, la condition (5) qui assure que la transformation est quasi statique s'écrit :

$$\frac{\beta |\dot{X}|}{Q \sqrt{\theta}} \ll 1. \quad (17)$$

Pour une transformation quasi statique, on peut négliger le terme quadratique $\frac{\pi}{8Q^2} \frac{\dot{x}^2}{x}$ présent dans l'équation (15) devant le terme linéaire $\frac{1}{\beta Q} \sqrt{\theta} \frac{\dot{x}}{x}$. C'est ce que nous ferons dans la suite de cette étude.

4.2. Bilan entropique

4.2.1. Taux de création d'entropie

La variation d'entropie d'un gaz parfait entre deux états d'équilibre repérés par les indices 0 et 1 s'écrit : $\Delta S = \frac{Nk_B}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} + Nk_B \ln \frac{V_1}{V_0}$. Sous forme adimensionnée, la variation d'entropie depuis l'instant initial à un instant quelconque s'exprime comme suit :

$$\frac{\Delta S}{Nk_B} = \frac{1}{\gamma-1} \ln \theta + \ln X. \quad (18)$$

On peut ensuite calculer le *taux de création d'entropie*, sous forme adimensionnée :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_c &= \frac{1}{Nk_B \omega_0} \frac{dS_c}{dt} = \frac{1}{Nk_B \omega_0} \left(\frac{d\Delta S}{dt} - \frac{P_{th}}{T_0} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \frac{\dot{\theta}}{\theta} + \frac{\dot{X}}{X} - \alpha(1-\theta). \end{aligned} \quad (19)$$

En utilisant les équations (15) et (16) et l'approximation (17), on obtient :

$$\dot{\sigma}_c = \frac{\beta \dot{X}^2}{Q\sqrt{\theta} X} + \alpha \frac{(1-\theta)^2}{\theta}. \quad (20)$$

4.2.2. Interprétation

Sauf cas particulier, il apparaît que $\dot{\sigma}_c > 0$, signe que la transformation envisagée est irréversible. L'expression de $\dot{\sigma}_c$ révèle deux sources d'irréversibilité : le mouvement du piston (terme contenant Q) et d'éventuels transferts thermiques (terme en α). Dans le cas d'une évolution adiabatique ($\alpha = 0$), l'irréversibilité de la transformation n'est liée qu'au mouvement du piston. Dans la limite où le piston voit sa vitesse tendre vers zéro, la transformation devient réversible. On retrouve le fait que la transformation réversible est une transformation idéalisée [2,10], sans réalité physique, puisqu'il est impossible de pouvoir observer un déplacement du piston en une durée finie alors que ce dernier garde une vitesse nulle.

Dans le langage de la thermodynamique hors d'équilibre [10,1], le taux de création d'entropie est la somme des produits d'un *flux thermodynamique* par la *force thermodynamique* associée. Le système est à l'équilibre thermodynamique chaque fois que la force et le flux thermodynamiques sont nuls. Dès que la force thermodynamique est non nulle, le système évolue de façon irréversible. La force thermodynamique est le moteur de l'évolution irréversible du système.

Dans l'expression simplifiée du taux de création d'entropie, considérons seulement le terme lié au mouvement du piston et donc au processus d'échange de volume entre le système étudié et le milieu extérieur. Le flux thermodynamique (unidimensionnel) correspondant est : $J_v = \frac{dV}{dt}$, soit, sous forme adimensionnée : $\tilde{J}_v = \dot{X}$. On peut alors à partir de la relation (20), en déduire la force thermodynamique adimensionnée \tilde{F}_v correspondante :

$$\tilde{F}_v = \frac{\beta \dot{X}}{Q\sqrt{\theta} X}. \quad (21)$$

Dans l'hypothèse d'une transformation quasi statique [condition (17)], la force thermodynamique obtenue est une fonction linéaire du flux thermodynamique, ce qui confirme que le système est à tout instant très proche d'un état d'équilibre thermodynamique. Dans ce régime linéaire, le taux de création d'entropie apparaît comme une fonction quadratique du flux [10]. Sous forme dimensionnée, on obtient $F_V = \frac{1}{T} \frac{N}{V} \sqrt{\frac{8mk_B T}{\pi}} u$. Au facteur $1/T$ près, on reconnaît le terme de pression linéaire en vitesse qui donne naissance à une « force de frottement fluide » dans l'étude des petites oscillations du piston autour de sa position d'équilibre. Le calcul mené ici confirme que c'est bien ce terme qui est le moteur de l'évolution irréversible du système.

On peut interpréter de façon qualitative le rôle du terme de pression linéaire en vitesse. Lorsque le piston se déplace dans le sens négatif, non seulement un nombre plus important de molécules viennent heurter sa face interne que lorsqu'il se déplace dans le sens opposé, mais ces molécules acquièrent aussi une énergie cinétique plus importante. En conséquence, le terme de pression linéaire en vitesse impose une conversion réciproque de l'énergie mécanique du piston en énergie interne du gaz différente selon que le piston se déplace dans un sens ou dans l'autre. Cette conversion n'est donc pas réversible. Et l'apparition d'une force de frottement visqueux dans l'étude des petites oscillations du piston autour de sa position d'équilibre n'est que la représentation mécanique d'un processus thermodynamique irréversible de conversion d'énergie mécanique du piston en énergie interne du gaz [2]. Ce processus peut être qualifié de *dissipatif* [11].

4.3. De la validité de la loi de Laplace

Combinant les équations (15) et (16), et moyennant l'approximation (17), on obtient :

$$\dot{\theta} = (1-\gamma)\theta \frac{\dot{X}}{X} - (1-\gamma) \frac{\beta\sqrt{\theta} X^2}{QX} - \alpha(1-\gamma)(1-\theta). \quad (22)$$

Dans la limite où $Q \rightarrow \infty$, ce qui correspond à un piston immobile, et avec la condition $\alpha = 0$ (transformation adiabatique), l'équation (22) se réduit à :

$$\frac{\dot{\theta}}{\theta} = (1-\gamma) \frac{\dot{X}}{X}, \quad (23)$$

qui par intégration, sous l'hypothèse que γ est constant dans le domaine de température envisagé, conduit à la loi de Laplace $\theta X^{\gamma-1} = \text{cste}$. Notons que dans les hypothèses $Q \rightarrow \infty$ et $\alpha = 0$, le taux de création d'entropie s'annule (*cf.* relation (20)) et la transformation devient réversible [2]. Par conséquent, la loi de Laplace n'est valable que dans le cas limite d'une transformation adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique. Dans le cas d'une transformation quasi statique, monobare et monotherme, elle doit être remplacée par la relation (22) plus générale.

4.4. Cas de la compression adiabatique monobare

L'état thermodynamique du gaz est initialement caractérisé par les paramètres suivants : P_0 , T_0 et le piston est bloqué dans la position x_0 . On suppose que $P_{\text{ext}} = 2P_0$. À l'instant $t = 0^+$, un opérateur extérieur libère le piston et le système évolue librement. La résolution des équations (15) et (16) est réalisée de façon numérique avec les paramètres suivants $\alpha = 0$ (évolution adiabatique), $\beta = 2$, $Q = 10$ et $\gamma = 1,4$ (gaz parfait diatomique).

Les conditions initiales s'écrivent comme suit sous forme adimensionnée : $X(\tilde{t} = 0) = 1$, $\dot{X}(\tilde{t} = 0) = 0$ et $\theta(\tilde{t} = 0) = 1$.

4.4.1. État d'équilibre final

L'application des deux principes de la thermodynamique permet de déterminer les paramètres d'état du gaz dans l'état final, qui sont repérés par l'indice 1, et de calculer sa variation d'entropie.

$$X_1 = \frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_0}{P_{ext}} + \gamma - 1 \right) = 0,643,$$

$$\theta_1 = \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{\gamma} + \frac{P_{ext}}{P_0} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) = 1,286,$$

$$\Delta S = \frac{Nk_B}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T_1}{T_0} \right] + Nk_B \ln \left[\frac{x_1}{x_0} \right] = 0,186 Nk_B.$$

4.4.2. Résultats numériques

a) Position du piston et température du gaz

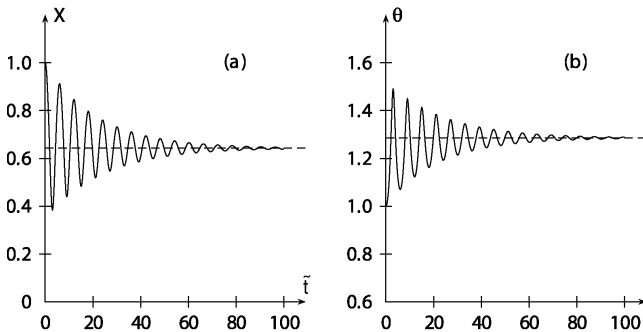


Figure 2 : (a) évolution temporelle de la position du piston. En tirets est repérée la valeur $X_1 = 0,643$ correspondant à l'état d'équilibre final ; (b) évolution temporelle de la température. En tirets, la valeur $\theta_1 = 1,286$ de la température à l'état d'équilibre final.

La relaxation du système vers l'état d'équilibre est caractérisée par des oscillations amorties. La position du piston et la température varient en opposition de phase. Lorsque le piston se déplace dans le sens négatif, les molécules gagnent de l'énergie cinétique lors de la réflexion sur la face interne du piston : l'énergie interne du gaz, et donc la température, augmentent. C'est l'inverse qui se produit lorsque le piston progresse dans le sens positif.

Par ailleurs, en suivant l'évolution (non représentée ici) du paramètre $\frac{\beta \dot{X}}{Q\sqrt{\theta}}$, on constate qu'il ne dépasse guère (en valeur absolue) 0,06, ce qui justifie que la transformation puisse être considérée comme quasi statique (cf. équation (17)).

Notons que la transformation étudiée ici ne diffère guère de celle qui intervient dans l'expérience de RÜCHARDT, destinée à mesurer $\gamma = C_p / C_v$, par analyse des oscillations de la masse mobile [12, 13].

b) Entropie et taux de création d'entropie

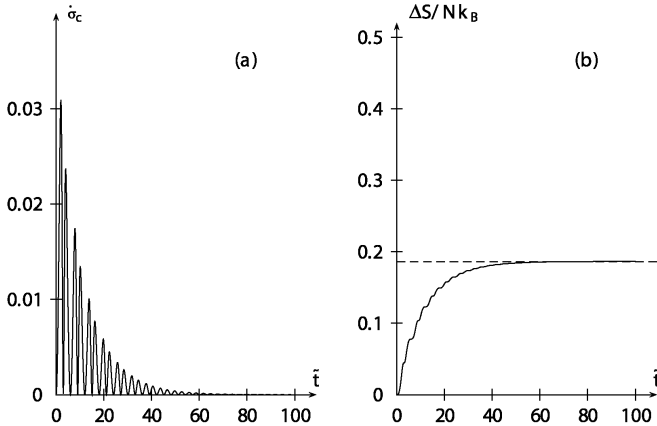


Figure 3 : (a) taux de création d'entropie en fonction du temps ; (b) évolution temporelle de la variation d'entropie du gaz. La valeur repérée en tirets correspond à la variation globale d'entropie $\Delta S / Nk_B = 0,186$.

Le taux de création d'entropie est toujours positif. Il en résulte que l'entropie du système est croissante, ce qui est conforme à l'évolution d'un système thermiquement isolé d'après le second principe de la thermodynamique. Ces simulations illustrent bien la définition d'un état d'équilibre thermodynamique : à l'équilibre, les paramètres d'état caractérisant le système sont *stationnaires* et le taux de création d'entropie est nul.

On peut estimer que l'état d'équilibre final est quasiment atteint pour $\tilde{t} = 60$. À titre d'exemple, pour 0,1 mol d'air, initialement à $T_0 = 300$ K, $P_0 = 0,5$ atm, avec $A = 10^{-2}$ m², $Q = 10$ et $\beta = 2$, la durée du régime transitoire est de l'ordre de la seconde. Cet ordre de grandeur est compatible avec les valeurs expérimentales [13].

4.5. Cas de la compression monotherme monobare

4.5.1. État d'équilibre final

Par rapport à l'étude précédente, seul le paramètre α est modifié. Les simulations ci-dessous ont été obtenues pour $\alpha = 5$. La transformation est monotherme et monobare. À l'état d'équilibre final, on a donc : $T_1 = T_0$, $P_1 = P_{ext}$ et $x_1 = \frac{P_0}{P_{ext}} x_0$. En variables adimensionnées : $\theta_1 = 1$, $X_1 = 1 / \beta = 0,5$.

4.5.2. Résultats numériques

a) Position du piston et température du gaz

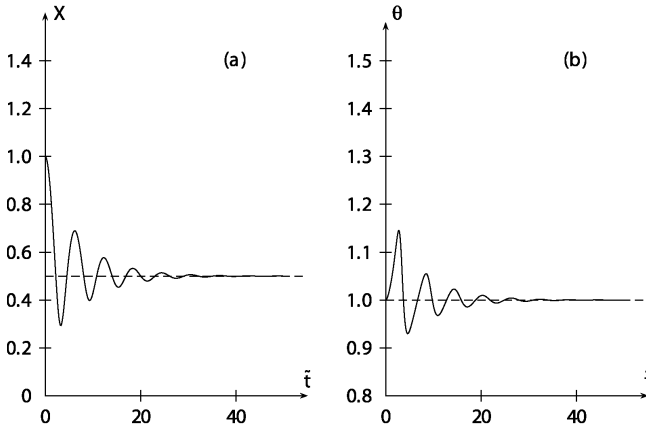


Figure 4 : (a) évolution temporelle de la position du piston. En tirets, la valeur $X_1 = 0,5$ correspondant à l'état d'équilibre final ; (b) évolution temporelle de la température. En tirets, la valeur $\theta_1 = 1$ de la température à l'état d'équilibre final.

Les oscillations du piston sont amorties. Au cours de cette transformation monotherme, la température du gaz s'écarte de celle du thermostat, mais ses variations relatives restent modérées, alors que les variations relatives de volume sont conséquentes. Plus α est élevé, et plus les variations relatives de température sont faibles. Ceci justifie *a posteriori* l'hypothèse de transformation isotherme du gaz, qui nous a permis dans la partie 1 de découpler les variations de volume et de température.

b) Potentiel enthalpie libre et taux de création d'entropie

Pour une transformation monotherme et monobare, $G^* = U + P_{\text{ext}}V - T_0S$ joue le rôle de potentiel thermodynamique : sa variation au cours d'une transformation spontanée irréversible est strictement négative. On a $\Delta G^* = -P_{\text{ext}}V_0 \left(\frac{P_0}{P_{\text{ext}}} - 1 \right) - Nk_B T_0 \ln \frac{P_0}{P_{\text{ext}}}$. Numériquement, on obtient $\Delta G^* = -0,307 Nk_B T_0 < 0$.

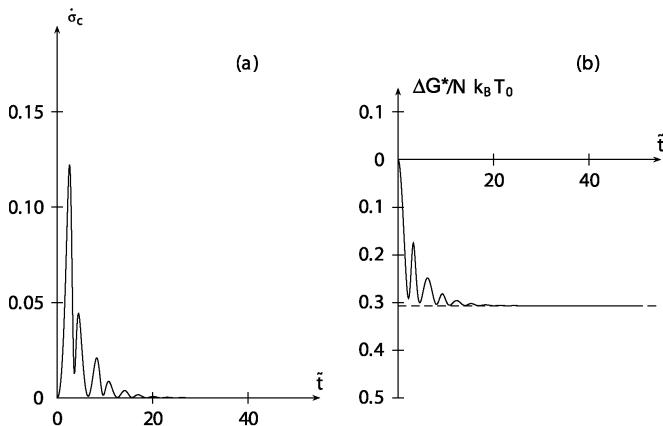


Figure 5 : (a) taux de création d'entropie en fonction du temps ; (b) évolution temporelle de la variation du potentiel G^* . La valeur repérée en tirets correspond à la variation globale du potentiel : $\Delta G^* / Nk_B T_0 = -0,307$.

La diminution de G^* est le signe, que la transformation envisagée est irréversible. On constate que l'amortissement du mouvement du piston est plus important que dans le cas adiabatique, alors que la pulsation des oscillations du piston reste quasiment inchangée. Comme le montre l'équation (20), les transferts thermiques contribuent à la production d'entropie et donc à la dissipation de l'énergie mécanique du piston. La transformation monotherme s'accompagne d'une conversion d'énergie mécanique du piston en énergie interne du thermostat.

CONCLUSION

On a utilisé dans cet article un modèle cinétique de la pression d'un gaz parfait au voisinage d'une paroi mobile pour étudier plus finement une transformation quasi statique et monobare du gaz. Nous avons montré que le mouvement du piston est amorti en raison de transferts irréversibles d'énergie mécanique du piston en énergie interne du gaz ou du milieu extérieur (thermostat). Ce processus peut apparaître dans l'équation mécanique du mouvement du piston sous la forme d'une force de frottement fluide. Le modèle utilisé permet aussi de faire une incursion dans le champ de la thermodynamique hors d'équilibre : il est possible d'étudier plus précisément la production d'entropie dans le système, dont on voit qu'elle est directement liée à la vitesse du piston. Ceci ne peut que contribuer à établir une distinction plus claire entre les notions de transformation quasi statique et réversible, que celle qui ressort de la lecture comparée des différents ouvrages classiques de thermodynamique. L'étude présentée dans cet article montre que, dans la compression ou la détente d'un gaz, la réversibilité de la transformation nécessite que le piston ait une vitesse nulle. La transformation réversible doit être vue comme un cas limite, sans réalité physique, où tous les flux thermodynamiques tendent vers zéro [10].

Par ailleurs, la résolution numérique des équations qui régissent l'évolution du système semble intéressante sur le plan pédagogique puisqu'elle permet de montrer la production d'entropie et corrélativement la décroissance du potentiel thermodynamique adapté au cours de l'évolution du système.

Les possibilités offertes par l'approche que nous avons suivie dans cet article sont nombreuses. C'est grâce à ce modèle que le fameux problème du « piston adiabatique » couplant l'évolution de deux gaz, évoqué par R. FEYNMAN [14] et naguère à l'origine d'une controverse dans le BUP [15-16-17], a été résolu [18-8-19-20].

REMERCIEMENTS

L'auteur est heureux d'adresser ses remerciements amicaux à Eddie SAUDRAIS et Laurent MEIGNIN, professeurs de sciences physiques en CPGE, pour leur relecture constructive et attentive du manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALLEN H. B. *Thermodynamics and an introduction to thermostatics*. John Wiley & sons, 1985.
- [2] OLIVIER S. et GIE H. *Thermodynamique (première et deuxième année)*. Tec & Doc, 1996.
- [3] PEREZ J.-P. et ROMULUS A. M. *Thermodynamique : fondements et applications*. Masson, 1993.
- [4] BAUMAN R. P. et COCKERHAM H. L. *Am. J. Phys.*, 1969, **37**, p. 675-679.
- [5] MORRIS G. P. et GRUBER C. J. *Stat. Phys.*, 2002, **109**, p. 649-568.
- [6] PIASECKI J. et GRUBER C. *Physica A*, 1999, **265**, p. 463-472.
- [7] GRUBER C. et FRACHEBOURG L. *Physica A*, 1999, **272**, p. 392-428.
- [8] GRUBER C. *Eur. J. Phys.*, 1999, **20**, p. 259-266.
- [9] SOUTIF M. *Vibrations, propagation, diffusion*. Dunod, 1970.
- [10] PRIGOGINE I. et KONDEPUDI D. *Thermodynamique : des moteurs thermiques aux structures dissipatives*. Odile Jacob, 1999.
- [11] BALIAN R. *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, 2002 **197**, p. 18-49.
- [12] RÜCHARDT E. *Phys. Z.*, 1929, **30**, p. 58-59.
- [13] DE LANGE O. L. et PIERRUS J. *Am. J. Phys.*, 2000, **68**, p. 265-270.
- [14] FEYNMAN R., LEIGHTON R. B. et SANDS M. *Le cours de physique de Feynman*. vol. Mécanique 2, InterÉditions, 1979.
- [15] BARRAT J.-P. Sur un problème (élémentaire ?) de thermodynamique. *Bull. Un. Phys.*, mars 1984, vol. 78, n° 662, p. 803-806.
- [16] BARRAT J.-P. À propos de : Sur un problème (élémentaire ?) de thermodynamique. *Bull. Un. Phys.*, juin 1986, vol. 80, n° 685, p. 1065-1067.
- [17] CHARDIN G. À propos de : Sur un problème (élémentaire ?) de thermodynamique. *Bull. Un. Phys.*, juin 1986, vol. 80, n° 685, p. 1055-1059.
- [18] CROSIGNANI B., DI PORTO P. et SEGEV M. *Am. J. Phys.*, 1996, **64**, p. 610-613.
- [19] CURZON A. E. *Am. J. Phys.*, 1969, **37**, p. 404-406.
- [20] CURZON A. E. et LEFF H. S. *Am. J. Phys.*, 1979, **47**, p. 385-387.



François VANDENBROUCK

Professeur de sciences physiques en classes préparatoires 2-TS1
Lycée Le Corbusier
Aubervilliers (Seine-Saint-Denis)